Вариант 2
Контрольная работа № 1.

1. По формулам Крамера решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}.$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot\left(1\cdot5-(-2)\cdot3\right)+2\cdot\left(3\cdot5-2\cdot3\right)+4\left(3\cdot(-2)-2\cdot1\right)=1\cdot11+2\cdot9+4\cdot(-8)=$$
$$=11+18-32=-3;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot\left(1\cdot5-(-2)\cdot3\right)+2\cdot\left(6\cdot5-0\cdot3\right)+4\left(6\cdot(-2)-0\cdot1\right)=$$
$$=3\cdot11+2\cdot30+4\cdot(-12)=33+60-48=45;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot\left(6\cdot5-0\cdot3\right)-3\cdot\left(3\cdot5-2\cdot3\right)+4\left(3\cdot0-2\cdot6\right)=1\cdot30-3\cdot9+4\cdot(-12)=$$
$$=30-27-48=-45;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\left(1\cdot0-(-2)\cdot6\right)+2\cdot\left(3\cdot0-2\cdot6\right)+3\left(3\cdot(-2)-2\cdot1\right)=$$
$$=1\cdot12+2\cdot(-12)+3\cdot(-8)=12-24-24=-36;$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{45}{-3}=-15; \qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-45}{-3}=15; \qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-36}{-3}=12.$$

Ответ: $(-15;15;12)$.

2. Найти предел:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right).$$

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2+x-1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{1}=1.$$

Ответ: 1.

3. Найти производную функции:

$$y=\sqrt[3]{\frac{e^{4x^2}}{\ln^2 7x}}+e^{35}.$$

Решение.

$$y'=\left(\left(\frac{e^{4x^2}}{\ln^2 7x}\right)^{\frac{1}{3}}+e^{35}\right)'=\frac{1}{3}\left(\frac{e^{4x^2}}{\ln^2 7x}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{e^{4x^2}}{\ln^2 7x}\right)'+\left(e^{35}\right)'=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{\ln^2 7x}{e^{4x^2}}\right)^2}\cdot\frac{\left(e^{4x^2}\right)'\ln^2 7x-e^{4x^2}\left(\ln^2 7x\right)'}{\left(\ln^2 7x\right)^2}+0=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{\ln^2 7x}{e^{4x^2}}\right)^2}\cdot\frac{e^{4x^2}\left(4x^2\right)'\ln^2 7x-e^{4x^2}\cdot 2\ln 7x\left(\ln 7x\right)'}{\ln^4 7x}=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{\ln^2 7x}{e^{4x^2}}\right)^2}\cdot\frac{e^{4x^2}\cdot 8x\cdot\ln^2 7x-e^{4x^2}\cdot 2\ln 7x\cdot\frac{1}{7x}\cdot 7}{\ln^4 7x}=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{\ln^2 7x}{e^{4x^2}}\right)^2}\cdot\frac{e^{4x^2}\ln 7x\left(8x\ln 7x-\frac{2}{x}\right)}{\ln^4 7x}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{\ln^2 7x}{e^{4x^2}}\right)^2}\cdot\frac{e^{4x^2}\cdot 2\left(4x^2\ln 7x-1\right)}{x\ln^3 7x}=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\ln^4 7x}{e^{8x^2}}\cdot\frac{e^{12x^2}}{\ln^3 7x}}\cdot\frac{2\left(4x^2\ln 7x-1\right)}{x\ln^2 7x}=\frac{\sqrt[3]{e^{4x^2}\ln 7x}\cdot 2\left(4x^2\ln 7x-1\right)}{3x\ln^2 7x}.$$

Ответ: $y'=\dfrac{\sqrt[3]{e^{4x^2}\ln 7x}\cdot 2\left(4x^2\ln 7x-1\right)}{3x\ln^2 7x}$.

4. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, сумма квадратов катетов которого равна 18?

Решение.

Пусть первый катет будет x, тогда второй обозначим $\sqrt{18-x^2}$, а площадь прямоугольного треугольника обозначим как функцию $S(x)=\dfrac{x\sqrt{18-x^2}}{2}$.

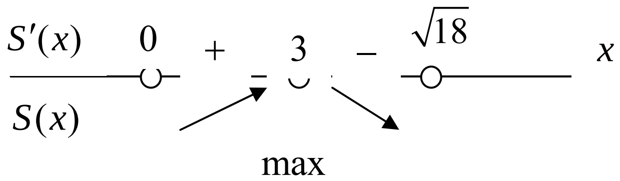
Найдем при каком значении x $\left(0<x<\sqrt{18}\right)$ функция примет наибольшее значение:

$$S'(x)=\left(\frac{x\sqrt{18-x^2}}{2}\right)'=\left(\frac{x}{2}\right)'\sqrt{18-x^2}+\frac{x}{2}\cdot\left(\sqrt{18-x^2}\right)'=\frac{1}{2}\sqrt{18-x^2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{18-x^2}}=$$

$$=\frac{18-x^2-x^2}{2\sqrt{18-x^2}}=\frac{2\left(9-x^2\right)}{2\sqrt{18-x^2}}=\frac{9-x^2}{\sqrt{18-x^2}};$$

$S'(x)=0$

$9-x^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=3\in\left(0;\sqrt{18}\right)$



Значит, при $x=3$ указанная функция принимает наибольшее значение, т.е.

$S(3)=\dfrac{3\sqrt{18-3^2}}{2}=4{,}5$ кв.ед.

Ответ: 4,5 кв.ед.

5. Составить уравнения касательных к графику функции $y=x^2-4x+5$, проведенных в точках ее пересечения с прямой $y=x+1$. Сделать чертеж.

Решение.

Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций:

$x^2-4x+5=x+1;$

$x^2-5x+4=0;$

$$\left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=4; \end{array}\right.$$

Составим уравнения касательных в этих точках:

$y' = 2x - 4;$

$y'(1) = 2 - 4 = -2;$

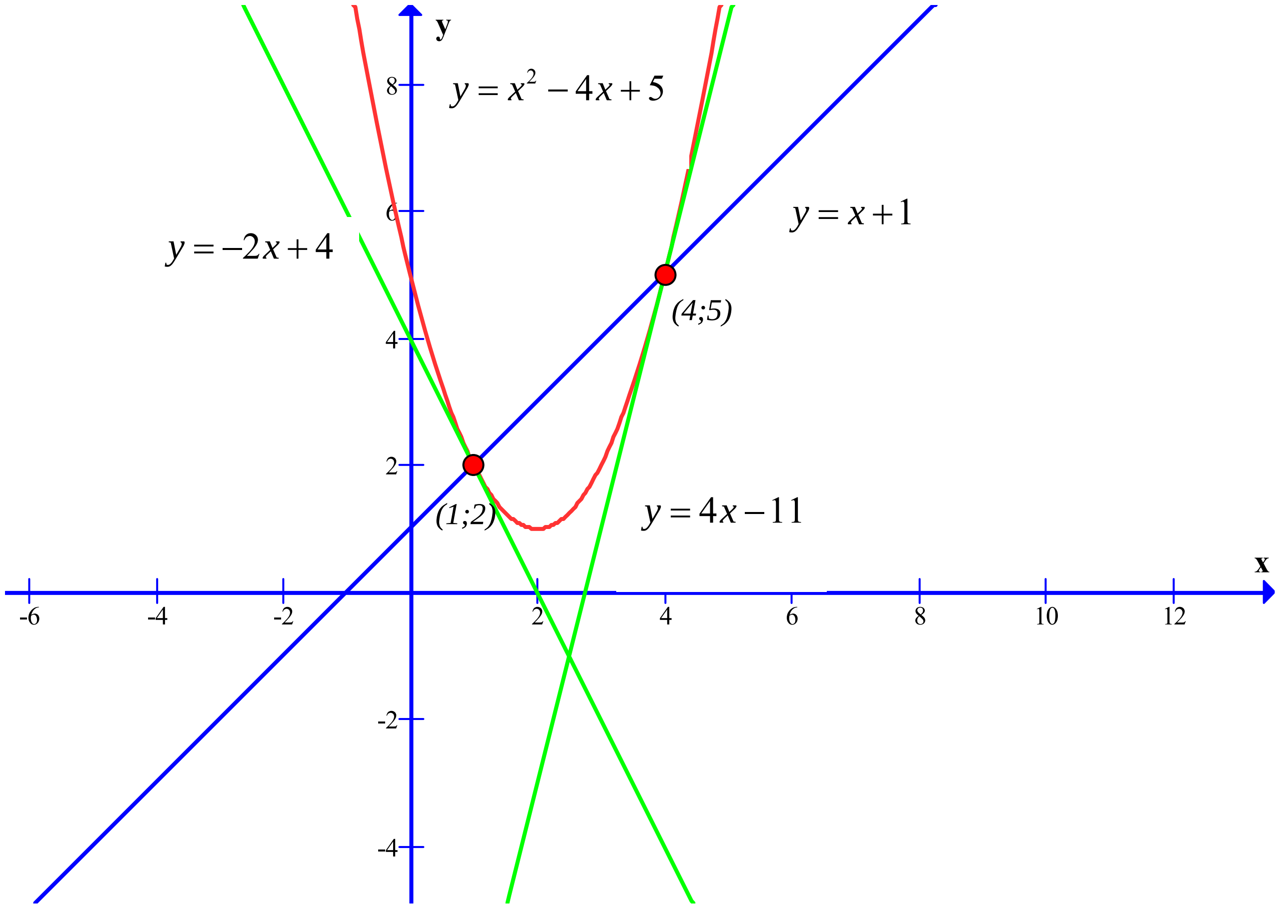
$y(1) = 1 - 4 + 5 = 2;$

$y = 2 - 2(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 4;$

$y'(4) = 8 - 4 = 4;$

$y(4) = 16 - 16 + 5 = 5;$

$y = 5 + 4(x-4) \quad \Rightarrow \quad y = 4x - 11;$



Ответ: $y = 4x - 11; \quad y = -2x + 4.$

6. Исследовать функцию $y = (3 - x)e^{-3x}$ и построить схематично ее график.

Решение.

$y = (3 - x)e^{-3x};$

1) $D(y) = R.$

Точек разрыва нет.

2) $y(-x) = (3 - (-x))e^{-3(-x)} = (3 + x)e^{3x}$ - функция ни четная, ни нечетная.

3) Определим точки пересечения графика с координатными осями.

с $Ox\,(\,y=0\,)$: $(3-x)e^{-3x}=0$; $3-x=0$ $x=3$;   точка пересечения с Ox $(3;0)$.

с $Oy\,(\,x=0\,)$: $y=(3-0)e^{0}=3$.

Точка пересечения с осью Oy: (0;3).

4) Найдем критические точки функции, прировняв к нулю первую производную:

$$y'=\left((3-x)e^{-3x}\right)'=(3-x)'\,e^{-3x}+(3-x)\left(e^{-3x}\right)'=-e^{-3x}+(3-x)e^{-3x}\cdot(-3)=$$

$$=-e^{-3x}(1+9-3x)=-e^{-3x}(10-3x);$$

$y'=0;$ $10-3x=0;$ $x=\dfrac{10}{3};$

y' $-$ $10/3$ $+$ x

y $\searrow$ min $\nearrow$

5) Определим промежутки монотонности и экстремумы функции:

Функция возрастает на $[10/3;+\infty)$.

Функция убывает на $(-\infty;10/3]$.

Функция имеет локальный минимум в точке $x=10/3$.

$$y(10/3)=(3-10/3)e^{-3\cdot10/3}=-\frac{1}{3e^{10}}\approx-0{,}0002;$$

6) Определим промежутки вогнутости и выпуклости, найдем точки перегиба.

$$y''=\left(-e^{-3x}\right)'(10-3x)+\left(-e^{-3x}\right)(10-3x)'=-e^{-3x}(-3)(10-3x)+\left(-e^{-3x}\right)(-3)=$$

$$=3e^{-3x}(10-3x+1)=3e^{-3x}(11-3x);$$

$y''=0;$ $11-3x=0$;

$x=\dfrac{11}{3}$ - критическая точка второго рода.

y'' $+$ $\dfrac{11}{3}$ $-$ x

y $\cup$ $\cap$

Точки перегиба $\left(\frac{11}{3};-\frac{2}{3e^{11}}\right)$.

7) Найдем асимптоты кривой.
а) Вертикальных асимптот нет.
б) Рассмотрим наличие у функции наклонных асимптот.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3-x)e^{-3x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x}-1}{e^{3x}}=0;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left((3-x)e^{-3x}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-x}{e^{3x}}=0;$$

$y=0$ - горизонтальная асимптота при $x\to+\infty$.

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(3-x)e^{-3x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}-1\right)e^{-3x}=-\infty;$$

Наклонных и горизонтальных асимптот при $x\to-\infty$ нет.

8) Используя результаты исследования, строим график функции.